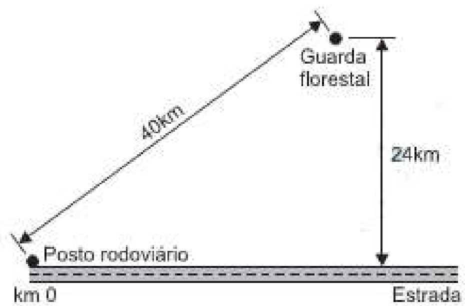
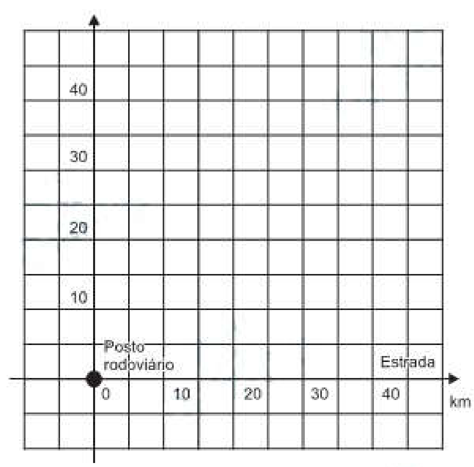
Exercícios Dissertativos

1. (2011) Suponha um trecho retilíneo de estrada, com um posto rodoviário no quilômetro zero. Suponha, também, que uma estação da guarda florestal esteja localizada a 40 km do posto rodoviário, em linha reta, e a 24 km de distância da estrada, conforme a figura abaixo.

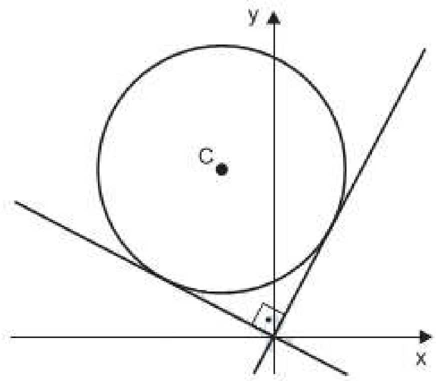


(a) Duas antenas de rádio atendem a região. A área de cobertura da primeira antena, localizada na estação da guarda florestal, corresponde a um círculo que tangencia a estrada. O alcance da segunda, instalada no posto rodoviário, atinge, sem ultrapassar, o ponto da estrada que está mais próximo da estação da guarda florestal. Explicite as duas desigualdades que definem as regiões circulares cobertas por essas antenas, e esboce essas regiões no gráfico abaixo, identificando a área coberta simultaneamente pelas duas antenas.

(b) Pretende-se substituir as antenas atuais por uma única antena, mais potente, a ser instalada em um ponto da estrada, de modo que as distâncias dessa antena ao posto rodoviário e à estação da guarda florestal sejam iguais. Determine em que quilômetro da estrada essa antena deve ser instalada.



2. (2012) Um círculo de raio 2 foi apoiado sobre as retas $y = 2x$ e $y = -x/2$, conforme mostra a figura abaixo.



(a) Determine as coordenadas do ponto de tangência entre o círculo e a reta $y = -x/2$.

(b) Determine a equação da reta que passa pela origem e pelo ponto C, centro do círculo.

---

3. (2013) Considere a família de retas no plano cartesiano descrita pela equação $(2-p)x+(2p+1)y+8p+4 = 0$, nas variáveis x e y , em que p é um parâmetro real.

(a) Determine o valor do parâmetro p para que a reta correspondente intercepte perpendicularmente o eixo y. Encontre o ponto de interseção neste caso.

(b) Considere a reta $x+3y+12 = 0$ dessa família para $p = 1$. Denote por A o seu ponto de interseção com o eixo x e por O a origem do plano cartesiano. Exiba a equação da circunferência em que o segmento OA é um diâmetro.

---

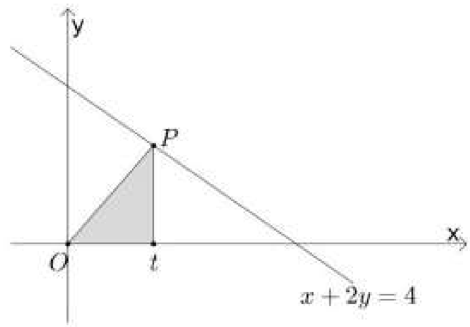
4. (2014) Considere no plano cartesiano os pontos $A = (-1, 1)$ e $B = (2, 2)$.

(a) Encontre a equação que representa o lugar geométrico dos centros dos círculos que passam pelos pontos A e B.

(b) Seja C um ponto na parte negativa do eixo das ordenadas. Determine C de modo que o triângulo ABC tenha área igual a 8.

---

5. (2015) Seja r a reta de equação cartesiana $x + 2y = 4$. Para cada número real t tal que $0 < t < 4$, considere o triângulo T de vértices em $(0,0)$, $(t,0)$ e no ponto P de abscissa $x = t$ pertencente à reta r, como mostra a figura abaixo.



(a) Para $0 < t < 4$, encontre a expressão para a função $A(t)$, definida pela área do triângulo T e esboce o seu gráfico.

(b) Seja k um número real não nulo e considere a função $g(x) = k/x$ definida para todo número real x não nulo. Determine o valor de k para o qual o gráfico da função g tem somente um ponto em comum com a reta r.