Exercícios Dissertativos

1. (2009/1) Em uma pequena cidade, um matemático modelou a quantidade de lixo doméstico total (orgânico e reciclável) produzida pela população, mês a mês, durante um ano, através da função

$$f(x) = 200 + (x + 50)cos(\frac{\pi}{3}x - \frac{4\pi}{3})$$

onde $f(x)$ indica a quantidade de lixo, em toneladas, produzida na cidade no mês x, com $1 \leq x \leq 12$, x inteiro positivo. Sabendo que $f(x)$, nesse período, atinge seu valor máximo em um dos valores de x no qual a função $cos(\frac{\pi}{3}x - \frac{4\pi}{3})$ atinge seu máximo, determine o mês x para o qual a produção de lixo foi máxima e quantas toneladas de lixo foram produzidas pela população nesse mês.

---

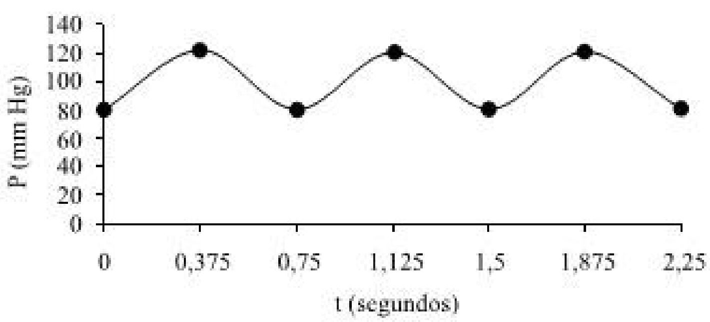
2. (2009/1) Há famílias que sobrevivem trabalhando na coleta de material para reciclagem, principalmente em cidades turísticas. Numa tal cidade, uma família trabalha diariamente na coleta de latas de alumínio. A quantidade (em quilogramas) que essa família coleta por dia varia, aumentando em finais de semana e feriados. Um matemático observou a quantidade de alumínio coletada por essa família durante dez dias consecutivos e modelou essa situação através da seguinte função

$$f(x) = 10 + (x + 1)cos(\frac{\pi}{3}x - \frac{2\pi}{3})$$

onde $f(x)$ indica a quantidade de alumínio, em quilogramas, coletada pela família no dia x, com $1 \leq x \leq 10$, x inteiro positivo. Sabendo que $f(x)$, nesse período, atinge seu valor máximo em um dos valores de x no qual a função $cos(\frac{\pi}{3}x - \frac{2\pi}{3})$ atinge seu máximo, determine o valor de x para o qual a quantidade coletada nesse período foi máxima e quantos quilos de alumínio foram coletados pela família nesse dia.

---

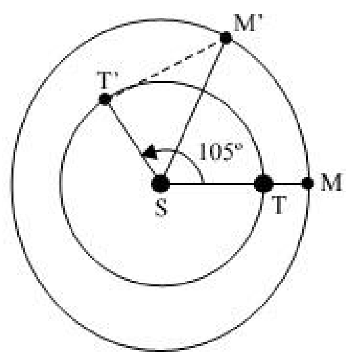
3. (2009/2) A variação da pressão nas paredes dos vasos sanguíneos (P, em $mmHg$) em função do tempo (t, em segundos) está representada no gráfico seguinte.



Observe que a imagem da função está no intervalo $[80, 120]$ e que seu período é de $0,75$ segundos, ou seja, $3/4$ de segundos. Com base nessas informações, determine uma função da forma $y = a+b.cos(k.t)$, onde a, b e k são constantes reais, que represente esse gráfico.

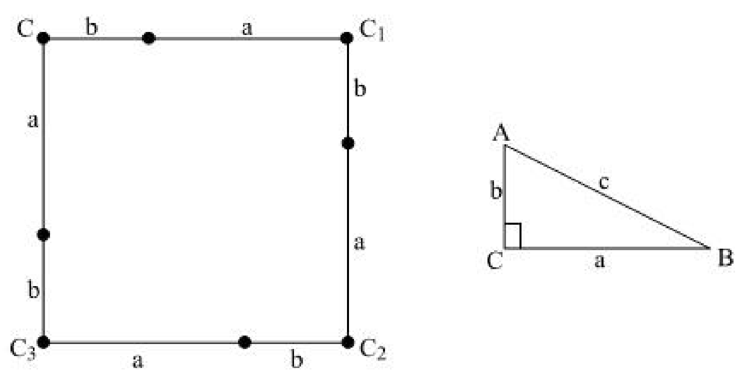
---

4. (2009/2) Em 2009, comemora-se o “Ano Internacional da Astronomia”em homenagem aos quatro séculos das primeiras observações telescópicas do céu, feitas por Galileu Galilei (1564 - 1642). Entretanto, para historiadores da ciência, o ano de 1543 é tido como o de início da ciência moderna devido aos trabalhos de Nicolau Copérnico (1473-1543), baseados no heliocentrismo e na uniformidade dos movimentos planetários em torno do Sol.
Aplicando alguns dos conhecimentos desenvolvidos por Copérnico ao planeta Marte, cuja órbita é maior que a da Terra, tem-se:
Conforme figura ao lado, suponha que Marte, em M, esteja em oposição à Terra, em T, e o Sol esteja em S. Observando Marte sempre à meia-noite, a partir dessa oposição, verifica-se que ele vai descendo progressivamente e atingirá o horizonte terrestre após 106 dias. Nessa situação, a Terra estará em T', Marte em M', e o ângulo $ST'M'$ será de 90^o. Sabe-se que o período sideral (tempo de revolução do planeta em torno do Sol) de Marte é de 687 dias e que a distância Terra-Sol é de, aproximadamente, 149 500000 km. Determine, aproximadamente, a distância de Marte ao Sol.
Dado: $cos 49^o = 0,66$.



---

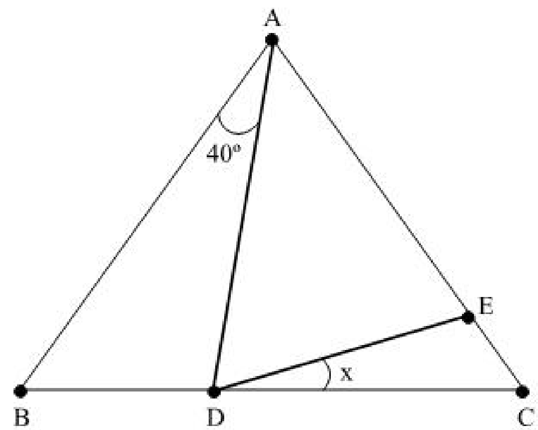
5. (2009/2) A história da matemática mostra que, embora o Teorema de Pitágoras fosse conhecido pelos chineses mil anos antes do nascimento do geômetra grego, esta importante relação métrica do triângulo retângulo recebe seu nome devido ao fato de ser atribuída a ele sua primeira prova matemática. Para isto, Pitágoras utilizou o conceito de área de um quadrado de lado formado pelos segmentos de reta “a”e “b”, onde a, $b \epsilon R$.



Sendo dados o quadrado $CC_1C_2C_3$ e o triângulo retângulo ABC, prove que “o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos”.

---

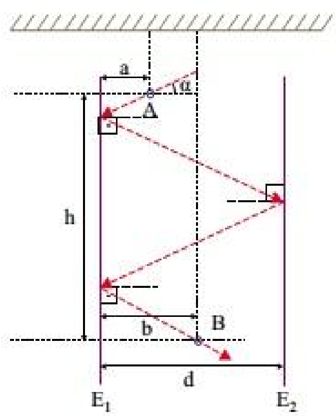
6. (2009/2) Na figura, o triângulo ABC é isósceles ($\overline{AB} = \overline{AC}$), bem como o triângulo ADE ($\overline{AD} = \overline{AE}$).



Sabendo que o ângulo $B\widehat{A}D$ mede 40^o, determine o valor, em graus, do ângulo $x = E\widehat{D}C$.

---

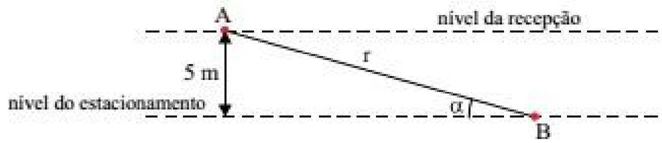
7. (2012/1) Sejam dois espelhos planos (E_1 e E_2), posicionados verticalmente, com suas faces espelhadas voltadas uma para outra, e separados por uma distância d, em centímetros. Suspensos por finas linhas, dois pequenos anéis (A e B) são posicionados entre esses espelhos, de modo que as distâncias de Ae B ao espelho E_1 sejam, respectivamente, a e b, em centímetros, e a distância vertical entre os centros dos anéis seja h, em centímetros, conforme mostra a figura.



Determine o ângulo de incidência α, em relação à horizontal, em função de a, b, d e h, para que um feixe de luz atravesse o anel A, se reflita nos espelhos E_1, E_2 e E_1 e atravesse o anel B, como indica o percurso na figura. Admita que os ângulos de incidência e de reflexão do feixe de luz sobre um espelho sejam iguais.

---

8. (2012/2) Um prédio hospitalar está sendo construído em um terreno declivoso. Para otimizar a construção, o arquiteto responsável idealizou o estacionamento no subsolo do prédio, com entrada pela rua dos fundos do terreno. A recepção do hospital está 5 metros acima do nível do estacionamento, sendo necessária a construção de uma rampa retilínea de acesso para os pacientes com dificuldades de locomoção. A figura representa esquematicamente esta rampa (r), ligando o ponto A, no piso da recepção, ao ponto B, no piso do estacionamento, a qual deve ter uma inclinação α mínima de 30^o e máxima de 45^o.



Nestas condições e considerando $\sqrt{2} \approx 1,4$, quais deverão ser os valores máximo e mínimo, em metros, do comprimento desta rampa de acesso?

---

9. (2013/1) Sabendo-se que $cos(2x) = cos^2x - sen^2x$, para quais valores de x a função $f(x) = cosx + \frac{1}{2}cos(2x)$ assume seu valor mínimo no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$?

---

10. (2014/2) Determine o período da função $f(\theta)$ dada pela lei de formação $f(\theta) = \frac{(-1)}{5}.sen(\frac{2}{3}.\theta - \frac{\pi}{3}) - 1$.
